Cálculo Numérico I

27 de Noviembre de 2009 | Examen parcial | 2º de Mat./D.T.

Hay que justificar todas las respuestas

Apellidos ____________________.____________________ Nombre ____________________ Grupo ______

1) (**5 puntos**) Se considera la ecuación $(*)\quad x^5 + x + 1 = 0$.

a) Demostrar que tiene una única solución real α y que $\alpha \in (-1, 0)$.

b) Analizar la convergencia del método de punto fijo

$$x_0 = a,\ x_{k+1} = g(x_k), \qquad k \geq 0,$$

cuando se elige g:

i) $g_1(x) = -x^5 - 1$

ii) $g_2(x) = -\sqrt[5]{x+1}$.

c) Escribir la iteración del método de Newton para la solución de la ecuación $(*)$. ¿Para qué valores del dato inicial a puede estar uno seguro que el método converge?

d) Calcular la solución de la ecuación (*) con 5 dígitos significativos correctos.

2) (**5 puntos**) Sean A, M, N matrices cuadradas tales que M es no singular y $A = M - N$. Para resolver el sistema lineal $Ax = b$, se utiliza el método iterativo

$$Mx_{n+1} = \big((1-\omega)M + \omega N\big)x_n + \omega b,$$

donde $\omega \neq 0$ es un parámetro real.

a) Demostrar que si el método iterativo converge lo hace a una solución de $Ax = b$. ¿Cuál es la matriz R_ω cuyo radio espectral gobierna la convergencia o no del citado método?

b)

i) Existe una relación lineal entre los autovalores de R_ω y de $M^{-1}N$. Encontrarla.

ii) Suponiendo que el método converge para $\omega = 1$, demostrar que converge también para cualquier $\omega \in (0, \beta)$, donde β es un número mayor que 1 (que puede depender de M y N).

c) Demostrar que el método converge para $\omega = 1$ si se eligen

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad , \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad N = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{5}{4} \end{bmatrix}.$$

d) Sean A, M, N las mismas matrices que en el apartado anterior. Determinar los valores de ω para los que el método converge. ¿Cuál es en este caso el valor óptimo de ω en el sentido de la velocidad de convergencia?